San Antonio de los Altos 2/10/2015

UNA RELACIÓN ENTRE LA TEORIA DE JUEGO Y TEORÍA DE LA INFORMACIÓN.

Reyes Polanco, Andrés Eduardo.
Profesor Asociado.
Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias Económicas y Sociales

RESUMEN

El siguiente artículo trata de juegos estáticos de información incompleta y la teoría matemática de la información, siendo la aplicación de esta última un refinamiento de la primera. El artículo tiene cuatro apartados y está organizado de la siguiente forma. La introducción en donde se plantea la posibilidad de aplicar la teoría de la información a los juegos estáticos de información incompleta. En el apartado II se da los conceptos de teoría de juego y, especial los juegos estáticos con estrategias puras con información completa e incompleta, el III trata de los conceptos fundamentales de teoría de la información que se aplicaran en el apartado IV, en el cual se propone un modelo como un refinamiento de un juego de dos persona estático y con información incompleta y finalmente, en el apartado V se presenta una discusión sobre los resultados obtenidos.

PALABRAS CLAVES

Teoría de juegos, juegos estáticos con información incompleta, equilibrio bayesiano de Nash, teoría de la información, entropía

A RELATIONSHIP BETWEEN THE GAME THEORY AND INFORMATION THEORY.

SUMMARY

The following article is static games of incomplete information and the mathematical theory of information, with the application of the latter a refinement of the first. The article has four sections and is organized as follows. The introduction where the possibility of applying information theory to static games of incomplete information arises. In section II the concepts of game theory is given and, especially static games of pure strategy with complete and incomplete information, the third deals with fundamental concepts of information theory to be applied in section IV, in which a model as a refinement of a static two-person game with incomplete information and finally proposes a discussion section V presents the results obtained

KEYWORDS
Game theory, static games of incomplete information, Bayesian Nash equilibrium, information theory, entropy.

INTRODUCCIÓN.

El siguiente trabajo trata de establecer la relación entre dos teorías matemáticas: la teoría de juego y la teoría de la información, la primera ampliamente aplicada en las ciencias sociales y la segunda proveniente de la teoría de la probabilidad con una gran aplicación en la física, estadística y la ingeniería de la computación entre otras disciplinas. La teoría de juego es por antonomasia la matemática nacida en el campo de las ciencias sociales, aplicada a: la microeconomía, finanzas, aparte de la aplicación en ciencia política y psicología.

En este trabajo se presenta cada una de las teorías por separado para luego utilizar la teoría de la información empleando el concepto de entropía como una medida de la incertidumbre de la ocurrencia de una sucesión de eventos. El uso de la función de entropía para afinar y, evaluar la mejor forma de las distribuciones de probabilidades en juegos donde interviene la naturaleza es una propuesta tentativa que se aplicará concretamente a los juegos estáticos con información incompleta, pero que se puede extender a juegos dinámicos con información incompleta, juegos contra la naturaleza y los juegos especiales de señales desarrollado por Rasmusen E. (1996) entre otros. El emplear la función de entropía en problemas de inferencia estadística o en teoría de juego tiene sus limitaciones. La función de entropía de una variable aleatoria X con distribución de probabilidad $F_X(x;\Theta)$, donde Θ es el conjunto de parámetros, no es otra cosa que la esperanza matemática del logaritmo de la función de densidad o probabilidad puntual $f_X(x;\Theta)$ de la variable aleatoria $X : -E(\log f_X(x;\Theta))$, pero como es bien sabido no siempre existe tal esperanza matemática, es el caso de variables aleatorias con distribución t usada en los estudios de series de tiempo de eventos propios del mercado financiero, entre otras. Tal situación obliga a descartar aquellas distribuciones donde no existe la función de entropía. Lo interesante es que previamente se sepa el grado de incertidumbre que contiene una variable aleatoria asumiendo diferentes hipótesis de la distribución de probabilidad. Son bien conocidos el caso en que se supone que la distribución es una uniforme, normal o exponencial.

Estos juegos que se caracterizan porque la naturaleza juega primero asignando a los participantes su tipo (características, en donde cada jugador sabe cual le correspondió pero desconocen los asignados a los otros jugadores, se emplean dos distribuciones: una a priori en donde se supone una probabilidad para cada tipo y otra a posteriori que para cada jugador es la probabilidad condicionada de la asignación por la naturaleza de los tipos de los demás jugadores dado el conocimiento de su propio tipo. Esta probabilidad se conoce como conjetura. En ocasiones, las probabilidades a priori se establecen como iguales para todos los tipos o siguen una distribución uniforme, esto es poco realista, además cuando los eventos son equiprobables la entropía es máxima.

Este último punto es más claro en los juegos dinámicos con información incompleta que no tocaremos acá, pero queda como una propuesta.

Sobre el uso de la probabilidad a priori, que son probabilidades establecidas por los decisores respondiendo a la experiencia que se tiene del comportamiento de la naturaleza o entorno, es importante tener presente que en cualquier caso, debe cumplir con lo que se establece en la axiomática de Kolmogorov tal como lo propuso De Finetti y, que no debe ocurrir lo que algunas investigaciones empíricas han encontrado como es el caso de Edward W(1954), el cuál observo en su estudio, que no necesariamente, para un sujeto, la probabilidad a priori de ocurrencia de un evento esté acotada en el intervalo cerrado [0,1] y esto trae un problema lógico grave que implica que no se cumple la propiedad de la adición de un suceso y su complemento: $p(a \cup \bar{a}) \neq p(a) + p(\bar{a})$.

En este artículo, como una primera aproximación, proponemos la aplicación de la teoría de la información cuando los jugadores tengan disponible una lista de distribuciones.

En todo caso, no se obtendría directamente la función de entropía de la variable aleatoria conocida, sino después de obtener las probabilidades correspondientes.

El artículo tiene cuatro apartados y está organizado de la siguiente forma. El primer es la introducción ya expuesta, en el apartado II se da los conceptos de teoría de juego, incluyendo los juegos dinámicos con información incompleta que el núcleo de este trabajo; en el III trata de los conceptos fundamentales de teoría de la información que se aplicaran en el apartado IV, en el cual se propone un modelo como un refinamiento de un juego de dos persona estático y con información incompleta y finalmente, en el apartado V se da una breve discusión.

II.-CONCEPTOS BÁSICOS DE TEORÍA DE JUEGOS.

La teoría de juego trata de aquellos problemas de toma de decisiones en donde la decisiones de los participantes se afectan mutuamente, bien porque cooperan entre si o no, de lo contrario, el problema no se puede abordar como un caso de la teoría de juego. Cuando no cooperan entre si se llama juego no cooperativo, también llamado estratégico, en caso contrario, se llaman juegos cooperativos. La teoría de juegos tiene un desarrollo embrionario durante el siglo XIX con los trabajos de los economistas Cournot y Edgeworth hasta llegar a mediado del siglo XX que renace con el libro publicado por Von Neumann y Morgensteen: The Theory of Games and Economic Behavior en 1944, pero su enfoque dejó de tener interés para los economistas después de recibirlo con entusiasmo. Posteriormente, a partir de la década de los cincuenta, se dieron las contribuciones de Nash, Shapley y otros que abrieron nuevos horizontes a esta teoría. Kreps (1994) considera que las herramientas aportadas por esta teoría, a pesar de sus limitaciones, permite comprender y predecir muchos de los fenómenos económicos. Las aplicaciones más comunes son el estudio de un mercado oligopólico que generalmente empieza con un mercado duopólico que desde el punto de vista matemático es uno de los mejores desarrollado y, posteriormente se van añadiendo nuevos participantes. Otra aplicación es las subastas que pueden presentarse entre otros casos en el mercado de capitales.

La teoría de juegos, además, tiene una amplia aplicación no solo en economía y ciencias sociales donde se han presentados entre otros, los trabajos de Shubik (1992ª, 1992b) y Rasmusen (1996) sino también en biología y ciencias políticas.

En general, un juego está conformado por los siguiente elementos: 1) un número de jugadores que definen un conjunto claro de los que toman decisiones 2) una forma de relacionarse los jugadores entre sí, compitiendo o cooperando 3) una lista de estrategias bien establecidas una para cada uno o para varios, conformando lo que

se llama perfil de estrategias; entendiendo por estrategia una secuencia ordenada de pasos con que el jugador pretende jugar un juego, desde el principio al fin. En algunos casos se distingue entre acciones y estrategias; una acción o movimiento es una elección que hace el jugador y una estrategia es una regla de cómo debe ser la elección en cada instante del juego dado su nivel de información. En los juegos simultáneos no se hace esta distinción y el espacio de acciones es el mismo al espacio de estrategias 4) Una función de pago, que da cuenta del resultado de cada conjunto de estrategia del juego 5) unas reglas que especifican las condiciones que deben cumplirse en el desarrollo del juego, estas deben ser claras y distintas. Si estas reglas son ambiguas o hay situaciones impredecibles no contempladas, entonces, la teoría de juego tiene poco que decir 6) el nivel de información sobre el conjunto de estrategias de todos o algunos jugadores y el pago correspondiente, además en las circunstancia que se realiza el juego. Este nivel de información puede ser completo o incompleto, perfecto o imperfecto. Es de información completa, cuando los perfiles de estrategias y los pagos de todos los jugadores, es de dominio público y perfecta si todos los jugadores conocen la historia del desarrollo del juego en el momento que les toca decidir. No interviene el azar 7) los equilibrios que se presentan en el juego de acuerdo a las estrategias del conjunto de jugadores y pagos. Un equilibrio es una estrategia que conduce al mejor pago para cada uno de los jugadores. Lo ideal es que exista un solo equilibrio, de no darse, la teoría de juego no indica cual de tantos equilibrios seleccionar 8) Un juego puede ser estático si la jugadas se realizan simultáneamente o dinámico si el juego se hace paso a paso, este último se representa en forma de un árbol donde se indica el orden que juegan los jugadores con sus estrategias y, en las ramas finales del árbol los pagos.
En todo juego, cooperativo o no, se parte del supuesto de racionalidad de los jugadores aunque esté limitada por el conocimiento o información disponible y su capacidad computacional Kreps. D.M (1994), además de la intencionalidad en cuanto a la búsqueda de optimizar sus ganancias.

Empecemos con el caso más sencillo como lo es un juego de dos jugadores, de información completa, estático y estrategias puras.

Un juego de dos jugadores puede expresarse por la terna: $J=(E_1,E_2,\Pi)$,o puede anotarse por la terna de $J=(2,E_{i=1,2},\Pi)$, el primero elemento de la terna indica que existen dos jugadores, el segundo las estrategias y finalmente la función de pago. Entonces, para un juego de n jugadores podemos expresarlo formalmente como: $J=(n,E_{i=1,2..n},\Pi)$, donde la función de pago Π es:

$\Pi : E_1 x E_2 x ... x E_n \to R^n$

Un juego de dos jugadores no cooperativo de suma cero es aquel en donde lo que gana uno lo pierde el otro, esto es, si a_{ij} es el pago del jugador A y b_{ij} es el de B para el par de estrategia (i,j) entonces $a_{ij}+b_{ij}=0$ .Un ejemplo de este juego es el duopolio, donde la ganancia en la participación del mercado de una de las empresas representa la pérdida de la otra. En caso contrario es un juego de suma no cero.

Cuando el juego de dos jugadores es estático y de información completa se expresa mediante una matriz cuyos componentes son vectores de dos dimensiones y se dice que está en forma normal, esto es: asumamos que el jugador *A* tiene n estrategias: $E_1=\{A_1,A_2...A_n\}$ y el jugador *B* tiene m estrategias $E_2=\{B_1,B_2...B_m\}$ con la función: $\Pi : E_1 x E_2 \to (a_{ij},b_{ij})$ que representa el pago recibido por cada jugador dada las estrategias de cada uno. En este caso el juego se expresa como $J=(E_1,E_2,\Pi)$.

La forma normal de este juego está dada por la siguiente matriz de pago:

	B_1	B_2	B_3			B_m
A_1	(a_{11},b_{11})	(a_{12},b_{12})	(a_{13},b_{13})	……..	……	(a_{1m},b_{1m})
A_2	(a_{21},b_{12})	(a_{22},b_{22})	(a_{23},b_{23})			(a_{2m},b_{2m})
A_n	(a_{n1},b_{n1})	(a_{n2},b_{n2})	(a_{n3},b_{n3})			(a_{nm},b_{nm})

Si el juego es de suma cero uno puede expresar el juego con una matriz, bien sea con solo los pagos del jugador *A* o los del jugador *B*.

Por ejemplo, la del jugador *A* es:

	B_1	B_2	B_3			B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	....	......	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}			a_{2m}
A_n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}			a_{nm}

El valor que toma la función de pago para cada par de estrategia en la matriz de pagos del jugador *A* es:

$\Pi(A_i, B_j) = a_{ij}$

En el caso de considerar al jugador B la función es:

$\Pi(A_i, B_j) = b_{ij}$

Con la condición de que $a_{ij} + b_{ij} = 0$ si es de suma cero.

En estos juegos se define como equilibrio la mejor repuesta que da cada jugador frente a las estrategias de los demás, medida por su función de pago o de utilidad. Formalmente dado un juego de n jugadores con información completa, con sus respectivos conjuntos de estrategia $\{E_1, E_2 ... E_n\}$ y de pagos $\{\Pi_1, \Pi_2 ... \Pi_n\}$,esto es, dado un juego:

$J = \{n; E_1, E_2 ... E_n; \Pi_1, \Pi_2 ... \Pi_n\}$

Y dado el perfil de estrategias: $e = \{e_1^*, e_2^* .. e_{i-1}^* . e_i \ , e_{i+1}^*, ... e_n^*\}$ Si existe una estrategia $e_i \in E_i$ para cada jugador i tal que cumple con la siguiente relación: $\Pi_i \{e_1^*, e_2^* .. e_{i-1}^* . e_i^* , e_{i+1}^*, ... e_n^*\} \geq \Pi_i \{e_1^*, e_2^* .. e_{i-1}^* . e_i \ , e_{i+1}^*, ... e_n^*\}$ para todo $e_i \in E_i$, entonces ese perfil de estrategias es una solución óptima.

En otras palabras, para cada jugador i, $e_i \in E_i$ es una solución óptima si es una solución al problema:

$\max \Pi_i \{e_1^*, e_2^*..e_{i-1}^*.e_i\ , e_{i+1}^*,...e_n^*\}$. Observe que $e_i^* \in E_i$, es la mejor respuesta del jugador i para $e_{-i} = \{e_1^*, e_2^*..e_{i-1}^*.e_{i+1}^*,...e_n^*\}$. Al perfil de estrategias $e = \{e_1^*, e_2^*..e_{i-1}^*.e_i^*, e_{i+1}^*,...e_n^*\}$ se llama un equilibrio de Nash. Para la interpretación de este equilibrio tomamos la siguiente cita: "Un equilibrio de Nash es un conjunto de estrategias tales-una para cada jugador-que ningún jugador tiene incentivo alguno (en término de mejoramiento de su propio pago) para desviarse de su parte del conjunto de estrategias" (Kreps 1994 página 35).

Ejemplo 1.

Consideremos el siguiente juego como un ejemplo. Dos pájaros están compitiendo por un mismo terreno cuyo valor es E. Cada pájaro puede actuar de dos forma distintas: pacíficamente o agresivamente, esto es, como paloma o como halcón. Si ambos actúan como paloma se repartirán el terreno por partes iguales, es decir, a cada uno le toca la mitad. Si actúan como halcón entonces entran en conflicto lo que acarrea que se destruya parte del terreno. Como ambos tienen igual capacidad de destrucción entonces el terreno a repartir es: $W = E/2 - C$ donde C es el costo de la confrontación. Si uno de los dos actúa como halcón y el otro como paloma, entonces el primero se queda con todo el terreno. Este juego se conoce como juego de los pájaros y del él se derivan otros juegos, como el juego de los sexos, de la gallina y el célebre dilema del prisionero. La forma norma o estratégica de este juego es:

Pájaro1/Pájaro 2	Halcón	Paloma
Halcón	(W,W)	(E,0)
Paloma	(0,E)	(E/2.E/2)

En este juego podemos observar que se trata de un juego de dos jugadores que juegan simultáneamente, que además todos conocen las consecuencias de las acciones de los jugadores y de sus preferencias, por tanto es un juego de información completa, además es de suma no cero. El pájaro 1 tiene dos estrategias: halcón y paloma cuyos pagos son respectivamente (W,E) y (0,E/2). Claramente jugará la estrategia halcón, porque es la mejor repuesta independientemente de la selección del pájaro 2. Lo mismo se puede decir del pájaro 2, por tanto un equilibrio de Nash es halcón-halcón con pagos (W,W).

IIa.- JUEGO ESTÁTICO CON INFORMACIÓN INCOMPLETA.

En este trabajo partiremos de un juego estático y con información incompleta y estrategias puras, que puede ser de suma cero o no. Es estático porque como indicamos al inicio, las jugadas se realizan simultáneamente y es de información incompleta porque no es del dominio público la estructura completa del juego o dicho de otra forma, al menos un jugador no conoce los pagos o preferencias de los demás jugadores. Para resolver el juego se introduce otro jugador: la naturaleza y, con ella el azar, entonces la naturaleza juega primero y una clase de resultado es una información privada para cada jugador. Cada jugador conoce sólo la información que ha recibido, ignorando la información que reciben los demás. Esta información se llama tipo del jugador que denotaremos por $t_i \in T_i$, donde el conjunto T_i representa todos los tipos posibles importantes para el problema. Como es el resultado del juego que realiza primero la naturaleza, es decir el azar, entonces $t_i \in T_i$ es una variable aleatoria. Ahora bien, dado que cada jugador conoce el tipo asignado por la naturaleza y no conoce los tipos de los demás, entonces se formula conjeturas o creencias de cuales tipos les fueron asignados a los demás jugadores y estas creencias o conjeturas están medida por una función de probabilidad condicional dada por: $P_i(t_{-i}/t_i) = P_i$ Esto es, dado el tipo del jugador i cual es la probabilidad del tipo de otro jugador, donde $t_{-i} = (t_1, t_2.t_{i-1}, t_{i+1}..t_n)$,es un vector donde se especifica los tipos de todos los jugadores menos el del jugador i. La probabilidad conjunta de los tipos está dada por: $P(t_1, t_2...t_n / t_i)$

Si se considera que estamos en presencia de variables aleatorias estocásticamente independientes, entonces: $P(t_1, t_2 ... t_n / t_i) = \prod_{j=1; j\neq i}^{n} P(t_{-i} / t_i) = \Pi_{j=1; j\neq i}^{n} P(t_{-i})$

Como se puede observar en esta clase de juego requiere incorporar además de las estrategias y pagos, los conceptos de tipos y conjeturas. Como ejemplo de tipos tenemos el clásico modelo de producción, donde una empresa tiene un costo de producción bajo, medio o alto y, la conjetura es la ley de probabilidad asociada a ese conjunto de eventos que definen los jugadores que puede ser por ejemplo una distribución uniforme.

Formalmente un juego de n jugadores de esta clase se expresa como:

$$J = \{n; E_1, E_2 ... E_n; T_1, T_2 ... T_n, P_1, P_2, ... P_n \Pi_1, \Pi_2 ... \Pi_n\}$$

Donde n es el número de jugadores, y para cada jugador i E_i es el conjunto de estrategias o acciones, T_i es el conjunto de tipos, P_i la conjetura medida en probabilidad condicional: $P_i(t_{-i} / t_i) = P_i$ y, Π_i la función de pago que depende de las estrategias o acciones seleccionadas y de los tipos efectivos de todos los jugadores participantes en el juego:

$$\Pi_i(e_1, e_2, e_3 .... e_n; t_1, t_2 .... t_n)$$

La incorporación de la naturaleza como nuevo jugador para solucionar este juego fue propuesta por Harsanyi, lo que se ha hecho es pasar de un juego de información incompleta a uno de información imperfecta.

Este juego puede describirse de acuerdo a Pérez .J, Jimeno.; J. L, Cerdá E (2004) considerando los siguientes pasos:

1. La naturaleza juega primero asignando aleatoriamente los tipos a cada jugador.
2. Cada jugador conoce su tipo asignado y nadie más y, cada jugador hace una conjetura del posible tipo que la naturaleza asigno a los demás estableciendo una probabilidad condicionada a su tipo: $P_i(t_{-i} / t_i) = P_i$
3. El juego se realiza simultáneamente.
4. Cada jugador recibe su pago.

Para obtener $P_i(t_{-i} / t_i) = P_i$ se aplica el teorema de Bayes:

$P_i(t_{-i} / t_i) = P(t_{-i} \cap t_i) / P(t_i); si P(t_i) > 0, \forall t_i$

Si consideramos son variables aleatorias independientes entonces:

$P(t_{-i} \cap t_i) = P(t_{-i})P(t_i) = \prod_{i=1}^{n} P(t_i)$

Cada jugador tendrá que resolver el siguiente problema de optimización que no es otra cosa que encontrar la utilidad esperada máxima que está en función de las estrategias seleccionada por cada jugador y los tipos. Esto es, consideremos el jugador i:

$$\underset{e \in E_1}{Max} \sum_{t_{-1} \in T_{-I}} (\Pi_i (e_1^*(t_1), e_2^*(t_2) ... e_{i-1}^*(t), e_i(t_i), e_{i+1}^* ..... e_n^*; t_i) P(t_{-1} / t_1))$$

El perfil de estrategias puras $e = \{e_1^*(t_1), e_2^*(t_2) .. e_{i-1}^* .(t_{i-1}) e_i^*(t_i), e_{i+1}^*(t_{i+1}), ... e_n^*(t_n)\}$ es un equilibrio de Nash, si para cada jugador i la estrategia $e_i^*(t_i)$ es una repuesta óptima esperada al perfil de estrategias de los demás jugadores dada por: $e_{-i} = \{e_1^*(t_1), e_2^*(t_2) .. e_{i-1}^* .(t_{i-1}), e_{i+1}^*(t_{i+1}), ... e_n^*(t_n)\}$.

Para ilustrar lo dicho veremos un ejemplo.

Ejemplo 2.

Retomemos es juego anterior de los pájaros, al primero la naturaleza le asigna un tipo que designaremos por $T_1 = t_1$. El primero piensa que al segundo la naturaleza le asignó dos tipos: $T_2 = t_a, t_b$, pero él no sabe cuál le asignó realmente. En este caso, suponemos que $P(t_1) = 1$ y las probabilidades a priori que le asigna a cada tipo del segundo pájaro son: $P(T_2 = t_a) = 0{,}6$ y $P(T_2 = t_b) = 0{,}4$.

Es fácil verificar que $P(T_2 = t_a / t_1) = 0{,}6$ y $P(T_2 = t_a / t_1) = 0{,}4$ Como el pájaro dos posiblemente tiene dos tipos entonces habrá dos matrices de pagos. La primera corresponde al tipo t_a, y la segunda al tipo t_b.

Pájaro1/Pájaro 2; tipo t_a	Halcón	Paloma
Halcón	(W,W)	(E,0)
Paloma	(0,E)	(E/2.E/2)

Pájaro1/Pájaro 2 tipo=t_b	Halcón	Paloma
Halcón	(W,W-k)	(E-k,-k)
Paloma	(0,-k)	(E/2.E/2)

Recordando que $W = E/2 - C$ y para la segunda matriz de pago $K < W$

Empecemos a resolver el problema asociado al primer pájaro. Consideremos el primer tipo del segundo jugador $T_2 = t_a$ Si el primer pájaro juega halcón la mejor respuesta del segundo pájaro es halcón; si juega paloma la mejor respuesta del segundo es halcón. Por tanto el primer pájaro máximizará su utilidad esperada:

$$\underset{e \in E_1}{Max}(\Pi_1(e_1(t_1) = halcón; e_1^*(T_2 = t_a) = halcón; e_2(t_1))\Pi_2(paloma; e_1^*(T_2 = t_a) = halcón)).P(t_a / t_1))$$
$$\max(W,0) : 0{,}6 = 0{,}6W$$

La estrategia seleccionada del primer pájaro es halcón.

Si el tipo del segundo pájaro es: $T_2 = t_b$. Si el primer pájaro juega halcón la mejor respuesta del segundo pájaro es halcón y, si juega paloma la mejor respuesta del segundo es paloma.

$$\underset{e \in E_1}{Max}(\Pi_1(e_1(t_1) = halcón; e_1^*(T_2 = t_b) = halcón)\Pi_2(e_2(t_1) = paloma; e_1^*(T_2 = t_b) = paloma)).P(t_b / t_1))$$

$$\max(W, E/2).0{,}4 = 0{,}4E/2$$

Entonces, la estrategia seleccionada del primer pájaro es paloma.

La solución del segundo jugador parte de que $P(t_1) = 1$, esta probabilidad no afectará el resultado. Si $T_2 = t_a$ el primer pájaro juega halcón como su mejor respuesta y la mejor respuesta de segundo pájaro es también halcón .

$$\underset{e \in E_1}{Max}(\Pi_{21}(e_1^*(t_1) = halcón; e_1^*(T_2 = t_b) = halcón)\Pi_{22}(e_2(t_1) = paloma; e_1^*(T_2 = t_b) = paloma)).1$$

$$\max(W, E/2).0{,}4 = E/2$$

Si $T_2 = t_b$entonces, el primer pájaro tiene como repuesta paloma, el segundo su mejor repuesta es paloma:

$$\max(W - k, E/2).1 = E/2$$

III.-CONCETOS BÁSICOS DE TEORÍA DE LA INFORMACIÓN.

La teoría de la información nace con el trabajo de Shannon con su obra A Mathematical Theory of Communication publicada en 1948. Su propuesta parte del concepto de entropía, término que se acuño por primera vez en la termodinámica. Boltzmann en 1896 propuso, siguiendo el segundo principio de la termodinámica, que en un sistema cerrado desde la perspectiva macroscópica la entropía aumenta y, desde el punto de vista de la mecánica aumenta el desorden. Estableciéndose una relación entre entropía y el grado de desorden. En efecto, supongamos ahora que tenemos dos sistemas representados por dos conjuntos de objetos A y B cada uno con un número n_a y n_b respectivamente. Todas las formas posibles que se pueden ordenar los objetos de A y de B son respectivamente $n_a!$ y $n_b!$ Ahora si para cada objeto de A le asociamos todas las ordenaciones de B y a cada objeto de B todas las ordenaciones de A tenemos, por la regla multiplicativa que todas las ordenaciones posibles son:

$$N^* = n_a.n_b \, .$$

Entonces la entropía de A y B en conjunto es la suma de las entropías de cada sistema, esto es:

$$H = H_a + H_b$$

Luego, cuando la entropía H crece, entonces N^* crece y cuando la entropía H es una suma, N^* es un producto. Esto nos lleva a la relación:

$$H = k \log N^* = k \log n_a + k \log n_a = H_a + H_b$$

Donde k es la constante de Boltzmann. Por tanto, la función de entropía de Boltzmann se expresarse como:

$$H = k \log P$$

Donde ahora, P representa la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado que se encuentra en relación con todos los estados posibles en que pudiera hallarse. Esta ecuación relaciona una cantidad termodinámica o macroscópica: la entropía, con una cantidad estadística: la probabilidad.

En la teoría de la información la entropía se mide mediante la expresión formulada por Sharnon dada por: $H(x) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_a p_i$.

Como se puede observar las dos funciones tienen expresiones analíticas similares, la formulación estadística contenida en esta última es aplicable a cualquier sistema dinámico y no sólo a la termodinámica como ocurre con la primera expresión.

Expliquemos con más detalle el significado de la entropía de Sharnon. Supongamos que tenemos una fuente de información que emite una sucesión de símbolos $\{s_i\}$ que son codificados por un sistema binario (0 o 1), ahora el número de códigos binarios asignados es inversamente proporcional a las frecuencias de los s_i esto es, a sus probabilidades, luego a los símbolos con mayor probabilidad le corresponde un menor número de dígitos. Supongamos que con m dígitos binarios podemos codificar todas las señales de la fuente de información cuya probabilidad son todas iguales a potencia de ½ esto es $p = (1/2)^m = 2^{-m}$, por tanto el valor esperado de dígitos que existen en la comunicación proveniente de la fuente (independiente de su sentido) es:

$$\sum m(1/2)^m = \sum m2^{-m}$$

Para determinar m tomamos logaritmo de base 2 en $p = 2^{-m}$; $-\log_2 p = m$; al sustituir en la expresión anterior obtenemos:

$$\sum m(1/2)^m = \sum m2^{-m} = H(x) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

La información contenida en cada símbolo es $I(s_i) = -\log_2 p$, por tanto la expresión anterior es la cantidad promedio de información emitida por la fuente, una vez conocida la sucesión, pero antes de la emisión medirá el grado de incertidumbre.

Dado una variable aleatoria X discreta con función de probabilidad puntual: $P(X = x_i; \Theta)$, entonces se define como función de entropía a:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i; \Theta) \log_k P(X = x_i; \Theta)$$

Si X es una variable continua con función de densidad: $f_X(x;\Theta)$, entonces se define como función de entropía a:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x;\Theta)\log_k f_X(x;\Theta)dx$$

El logaritmo puede tomarse de base binaria (k=2); de base neperiana (k=e) o decimal (k=10), en cada uno de los casos se dice que la entropía está medida en unidades binarias o bit, nep o decimal.

Hay varias propiedades importantes de esta función que enumeraremos brevemente:

1) $H(X) \geq 0$ y es monótona no decreciente. Cuando el sistema es perfectamente ordenado $H(X) = 0$.

2) Si la distribución es discreta uniforme, esto es todos los símbolos tienen igual probabilidad de $1/n$, entonces $H(X)$ alcanza su máximo y este es $MaxH(X) = \log_k n$

3) La cantidad de información sobre una variable aleatoria discreta X contenida en otra v.a. discreta Y, las cuales tienen como función de probabilidad conjunta dada: $P(X = x_i, Y = y_i;\Theta) = p_{ij}$ y probabilidades marginales de cada una $P(X = x_i;\Theta) = p_{i\cdot}$ y $P(Y = y_i;\Theta) = p_{\cdot j}$; entonces, la cantidad de información es: $I_Y(X) = H(X) - H_Y(X)$ donde $H_Y(X) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} p_{ij}\log_k p_{ij}/p_{\cdot j}$ Se demuestra que $I_Y(X) = H(X) - H_Y(X) \geq 0$ Si las variables X es Y son independientes entonces: $I_Y(X) = H(X) - H_Y(X)$ =0.

Si se considera dos variables aleatorias continuas X, Y con funciones de densidad: $f_X(x;\Theta)$ y $f_Y(x;\Theta)$ si ellas son independientes entonces:

$$H(X;Y) = H(X) + H(Y)$$

4) La función H es cóncava[1]

La función $H(x)$ se interpreta como una medida de incertidumbre antes de conocer los símbolos que emitirá la fuente y a posteriori como información. La negaentropía

---

[1] Se entiende por función convexa lo que sigue: Dada una función real valorada $f : S \subseteq R \to R$ y $\lambda \in [0,1]$ si para todo par $(x_1, x_2) \in S$, se dice que la función es cóncava si se cumple:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

se asocia a cantidad de información ganada por un sistema abierto. De acuerdo a la cuarta propiedad si X e Y no son estocásticamente independientes, se disminuye la incertidumbre de X cuando se realiza o conoce Y a esto se le llama información o negaentropía Hay sistema que tienen la característica de enviar entropía al entorno y tomar de él información o negaentropía; estos sistemas se llaman abiertos y si están alejados de equilibrio tienen la característica de hacerse cada vez mas complejos y tener una estructura caótica.

Si se considera la función de entropía de un estadístico esta mide la incertidumbre asociada a ella antes de tomar la muestra particular y, la otra interpretación es la de ex post , es decir, cuando se toma la muestra particular, en este caso se entiende por cantidad promedio de información. Para ilustrar lo dicho, consideremos los siguientes ejemplos

Ejemplo 3

Supongamos que tenemos una urna con diez bolas, de las cuales nueve son blancas y una negra. Si x cuenta el número de bolas blancas que salen en sucesivas extracciones, entonces la cantidad de información que salga una blanca es:

$I(blanca) = -\log_2 0{,}9 = 0{,}152030$ bit

Y que salga una bola negra es:

$I(negra) = -\log_2 0{,}1 = 3{,}321928$ bit

Esto quiere decir que hay menos incertidumbre sobre la extracción de una bola blanca que de una bola negra o dicho de otra forma, se necesita menos información sobre el evento: sale una bola blanca.

Ahora considerando los dos eventos: sale una bola blanca o sale una bola negra, la entropía o información esperada es:

$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i = -0{,}90\log_2 0{,}90 - 0{,}10\log_2 0{,}10 = 0{,}468995$ bit de información.

Ejemplo 4.

Supongamos que tenemos la distribución conjunta y las marginales de dos variables aleatorias: $X = 0,1,2$ e $Y = 0,1,2$ tal como se muestra a continuación:

X;Y	0	1	2	TOTAL
0	0,02777778	0,16666667	0,22222222	0,41666667
1	0,02777778	0,05555556	0,05555556	0,13888889
2	0,08333333	0,13888889	0,22222222	0,44444444
TOTAL	0,13888889	0,36111111	0,5	1

Además, se tienen las distribuciones condicionales de la variable X dado los valores de Y: $P(X = x_0 / Y = y_0) = P(X = x_0, Y = y_0) / P(Y = y_0)$

X;Y	0	1	2
0	0,2	0,46153846	0,44444444
1	0,2	0,15384615	0,11111111
2	0,6	0,38461538	0,44444444
TOTAL	1	1	1

Las preguntas que se hacen son:

a.-¿En cuánto disminuye la incertidumbre de X conocido que Y=0?

b.-¿En cuánto disminuye conocido todos los valores de Y?

Para responder a esas preguntas calculamos la función de entropía de la variable X dada por:

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i = -0{,}41666 \log_2 0{,}4166 - 0{,}1388 \log_2 0{,}1388 - 0{,}444 \log_2 0{,}444 = 1{,}4417$$

Ahora la cantidad de información de X contenida en Y es:

$$H_y(x) = -\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} p_{ij} \log_a (p_{ij} / p_{.j}) .$$

Para la primera pregunta se tiene:

$$H_{y=0}(x) = -\sum_{i=0}^{2} p_{i0} \log_a (p_{i0} / p_{.0}) = -0{,}0277 \log_2 0{,}2 - 0{,}0277 \log_2 0{,}2 - 0{,}083 \log_2 0{,}6 = 0{,}1904$$

Por tanto $I_y(x) = H(x) - H_{y=0}(x) = 1{,}4417 - 0{,}1904 = 1{,}2513$

Para la segunda se tiene:

$$H_y(x) = -\sum_{i=0}^{2} \sum_{i=0}^{2} p_{ij} \log_a (p_{ij} / p_{.0}) = -0{,}0277 \log_2 0{,}2 - 0{,}0277 \log_2 0{,}2 - 0{,}083 \log_2 0{,}6$$

$$- 0{,}16 \log_2 0{,}48 - \ldots - 0{,}222 \log_2 0{,}444 = 1{,}4138$$

Luego la ganancia es:

$$I_y(x) = H(x) - H_y(x) = 1,4417 - 1,4138 = 0,02$$

Prácticamente es nula la ganancia, luego las dos variables son estocásticamente cuasi independientes.

IV UNA PROPUESTA DE TEORÍA DE JUEGO Y DE LA INFORMACIÓN.

Hasta ahora se ha visto que la solución propuesta es incluir un jugador que no tiene intencionalidad ni racionalidad, es un jugador que no tiene interés en participar en el juego y sin embargo está presente y su actuación tiene consecuencia en el pago esperado de cada jugador. Su presencia conlleva a dos distribuciones de probabilidades, una a priori y otra a posteriori asociada esta última a la conjetura. El primer problema es saber hasta qué punto la distribución de probabilidad a priori afecta la función de probabilidad a posteriori. Si la función de probabilidad a priori afecta la función de probabilidad a posteriori entonces se dice que es informativa, en caso contrario es no informativa. En este juego lo que hace la naturaleza es asignar los tipos de cada jugador de acuerdo a una ley de probabilidad, como ya hemos visto, y que es de conocimiento público y luego se obtienen las probabilidades a posteriori, pero si se supone que los tipos son variables independientes, las probabilidades a priori coinciden con las posteriori. Se puede preguntar: ¿Por qué todos los jugadores deben tener la misma experiencia y llegar a la misma ley de probabilidad? ¿No puede ocurrir que tengan percepciones diferentes y por tanto asignen probabilidades distintas aunque después se hagan del conocimiento público?

Para dar repuesta partimos que se pueden establecer varias distribuciones a priori en cuanto al comportamiento de la naturaleza que son del conocimiento común, salvo que no se conoce cual tiene asociada mayor incertidumbre. Supongamos que en el juego se tiene disponibles dos distribuciones de probabilidad discreta para el conjunto de tipos: $t_{-i} = (t_1, t_2 . t_{i-1}, t_{i+1} .. t_n)$; consideremos que la primer distribución es dadas por : $P(t_1),P(t_2)....P(t_n)$; $P(t_i)\geq 0,\wedge\sum_{i=1}^{n}P(t_i)=1$ y la segunda $Q(t_1),Q(t_2)....Q(t_n)$, $Q(t_i)\geq 0,\wedge\sum_{i=1}^{n}Q(t_i)=1$; seleccionará la primera distribución a priori discreta si:

$$-\sum_{j=1}^{n}P(t_j)\log_2 P(t_j)\leq -\sum_{j=1}^{n}Q(t_j)\log_2 Q(t_j)$$

La igualdad se cumple si $P(t_i)=Q(t_i);\forall i$

Esto se puede generalizar si hay más de dos distribuciones a priori disponibles.

Ejemplo 5.

Tomemos nuevamente el ejemplo de los pájaros, se recordará que el primero piensa que al segundo la naturaleza le asignó dos tipos: $T_2=t_a,t_b$, pero él no sabe cuál le asignó realmente. En este caso, suponemos que $P(t_1)=1$ y las probabilidades a priori que le asigna a cada tipo del segundo pájaro son: $P(T_2=t_a)=0{,}6$ y $P(T_2=t_b)=0{,}4$.

Pero ahora consideramos dos distribuciones adicionales que se obtienen de dos expertos y son:

Distribución 2: $P(T_2=t_a)=0{,}3$ $P(T_2=t_b)=0{,}7$
Distribución 3 $P(T_2=t_a)=0{,}1$ $P(T_2=t_b)=0{,}9$

Haciendo los cálculos obtenemos: la entropía para la primera distribución $H_1=2923$, para las siguientes son: $H_2=2653$ y $H_3=1412$. Por tanto la tercera distribución tiene asociada una menor incertidumbre.

Ahora consideremos la intervención de la utilidad o pago, para esto definiremos lo que se conoce como incertidumbre útil e incertidumbre útil condicional tal como las llama Álvarez Pedro (1981).

IVa.-Definición de incertidumbre útil:

Sea E un espacio muestral con n eventos elementales: $E=\{e_1,e_2...e_n\}$ con probabilidad: $P(e_i)\geq 0,\wedge\sum_{i=1}^{n}P(e_i)=1$

A cada e_i se le asigna una función de utilidad o de pago Π_i con la misma distribución de probabilidad de e_i; esto es; $P(e_i) = P(\Pi_i); \forall i$. Se define como incertidumbre útil del campo E a:

$$HU(e_i;\Pi_i) = -\sum_{i=1}^{n} P(e_j)(\Pi_i / E(\Pi)) \log_2 P(e_j)$$

Donde $E(\Pi) = \sum_{i=}^{n} P(\Pi_i)\Pi_i$

Es evidente, que si la función de pagos es la misma para todos los eventos, entonces, la información útil coincide con la expresión de Shanno. Esta definición es un punto de partida para definir la que sigue.

IVb.-Definición de Incertidumbre útil bidimensional.

De la misma forma que en el párrafo anterior tomamos la idea de Álvarez Pedro (1981), de la incertidumbre útil bidimensional.

Sean dos espacios muestrales $E_1 = \{e_{11}, e_{12} ... e_{1n}\}$ y $E_2 = \{e_{21}, e_{22} ... e_{2m}\}$ con n y m eventos elementales respetivamente, y consideremos la probabilidad bidimendional P_{ij} y las funciones de utilidad o pago Π_{ij} asociados a los pares de eventos (e_{1i}, e_{2i}).

Entonces, la probabilidad marginal de $e_{1i} \in E_1$ es: $P_i = \sum_{j=1}^{m} P_{ij}$, la probabilidad marginal de $e_{2j \in} E_2$ es: $P_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}$; la probabilidad de los eventos de E_1, condicionados a los eventos de E_2, es: $P(i/j) = P_{ij} / P_j$; la probabilidad de los eventos de E_2, condicionados a los eventos de E_1, es: $P(j/i) = P_{ij} / P_i$.

La utilidad marginal de los eventos de E_1, condicionados a los eventos E_2 es: $\Pi_i = \sum_{j=}^{m} P(j/i)\, \Pi_{ij}$ y de los eventos de E_2 condicionados a los eventos E_1 es: $\Pi_j = \sum_{i=1}^{n} P(i/j)\Pi_{ij}$

De estas relaciones podemos encontrar la esperanza de Π_{ij}:

$$E(\Pi_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_{ij}\Pi_{ij} = \sum_{i=1}^{n} P_i\Pi_i = \sum_{j=1}^{m} P_j\Pi_j = E(\Pi)$$

Se llama incertidumbre útil del campo E_2 condicionado por el campo E_1 a:

$$HU(T_2/T_1) = -(E(\Pi)^{-1}\sum\sum P_{ij}\Pi_{ij}\log P(j/i)$$

Vc.-Aplicación a juegos estáticos de información incompleta.

Ahora traslademos la idea presentada originalmente por Álvarez Pedro (1981), como dos conjuntos de eventos A y B, donde hay una función de utilidad Π_{ij} asociada a los pares (A_i, B_j) como dos conjuntos de tipos T_1 y T_2 en un juego de dos jugadores, de estrategias puras y información incompleta.
Sean dos espacios de estrategias $E_1 = \{e_{11}, e_{12}...e_{1n}\}$ y $E_2 = \{e_{21}, e_{22}...e_{2m}\}$ con n y m estrategias respetivamente, y consideremos que los jugadores tienen asociados dos conjuntos de tipos T_1 y T_2, vectores con r y s elementos respectivamente Para simplificar supongamos que $T_1 = t_{11}$ que es el tipo que le asigno la naturaleza al primer jugador desconociendo cuál de los tipos T_2 le fueron asignados al segundo jugador. Pero se conoce las probabilidades a priori de los tipos. Si tales tipos son variables aleatorias independientes entonces, las probabilidades a posteriori son iguales a las probabilidades a priori. En otras palabras, las conjeturas son del dominio público. Entonces, en este juego hay s matrices de pagos de dimensión nxm. Para el primer jugador se tiene que $P(T_1 = t_{11}) = 1$ y s conjeturas medidas por las probabilidades del conjunto T_2 : $P(t_{21}), P(t_{22}),....P(t_{2S})$; $\sum_{i=1}^{s} P(t_{2i}) = 1$. Para cada tipo del jugador dos, el jugador uno tiene una respuesta óptima, por tanto, consideremos el conjunto que representa estas respuestas $\{e_1^*(t_{21}), e_2^*(t_{22}),....e_s^*(t_{2S})\}$ con pagos: $\{\Pi_1^*(t_{21}), \Pi_2^*(t_{22}),....\Pi_s^*(t_{2S})\}$, estos pagos tienen asociados la ley de probabilidad de los tipos: $P(t_{21}), P(t_{22}),....P(t_{2S})$, por tanto podemos obtener la esperanza matemática:

$$E(\Pi(t)) = \sum_{i=1}^{s} \Pi_i^*(t_2)P(t_{2i})$$

Se llama incertidumbre útil de los tipos T_2 del segundo jugador para el primer jugador a:

$$HU(e_i;\Pi_i) = -\sum_{i=1}^{n} P(t_{2i})(\Pi_i^* / E(\Pi))\log_2 P(t_{2i})$$

Esto quiere decir, que los pagos recibidos de acuerdo a la solución óptima son "pesos que refuerzan la incertidumbre local frente a los resultados de la experiencia" (Álvarez Pedro 1981-página 195).

Ahora consideremos que los tipos no son variables aleatorias independientes, esto es, dado el tipo de un jugador la probabilidad $P(t_{-i}/t_i) \neq P(t_{-i})$ entonces tenemos que si se trata de dos jugadores, la incertidumbre útil del campo T_2 condicionado por el campo T_1 es:

$$HU(T_2/T_1) = -(E(\Pi)^{-1} \sum_{j=1;j\neq i;}^{n} P(t_{2j})\Pi_i^* \log P(j/i)$$

La información útil está dada como:

$$IU(T_1,T_2) - H(T_2/T_1) = -\sum_{i=1}^{n} P(t_{2i})(\Pi_i^*/E(\Pi))\log_2 P(t_{2i}) - (-E(\Pi)^{-1}$$

IV.- DISCUCIÓN.

En la bibliografía especializada se establece claramente que en los juegos estratégicos con información incompleta y en este caso de estrategias puras, la naturaleza juega primero y las acciones que realiza tienen asociada una ley de probabilidad que es del dominio público, una y solamente una. Entonces, ¿Por qué complicarse la vida? La razón es que como toda teoría, es una aproximación a la realidad. El supuesto de que existe una sola ley de probabilidad a priori conocida por todos los jugadores, y que esta ley es el resultado de la experiencia previa del conjunto de jugadores, hace suponer que hay un consenso entre ellos para definir esta única ley. Situémonos en el caso de un jugador que busca a un grupo de expertos y le presenta varios escenarios, cada experto le indica la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los escenarios, así que tendrá una ley de probabilidad por cada uno de los expertos, entonces ¿cuál es el criterio para seleccionar una sola ley? Uno puede pensar que seleccionará la del experto que tiene mayor credibilidad. Pero si esto es así ¿por qué no usar solamente la opinión de este experto? Nosotros pensamos que si buscamos varias opiniones es porque pensamos que todas eran igualmente creíbles. Por tanto, tendremos tantas leyes de probabilidad como expertos consultamos. Y una manera de seleccionar una distribución es aquella que tiene menor incertidumbre, y esto se mide mediante la función de entropía. La única restricción para resolver este tipo de juego siguiendo la propuesta de Harsanyi es que la distribución seleccionada sea de dominio público o la información sea asimétrica, esto es un juego estático de información imperfecta.

Por otra parte, está lo planteado de incertidumbre útil, tanto condicional como no condicional, esto es, si se asume que las variables aleatorias *tipos* las conjeturas que se hacen sobre ellas son independientes o no. La pregunta es ¿Por qué usar la idea de incertidumbre útil medida en términos de la función de entropía ponderada por los pagos asociados a un perfil de estrategias óptimas en un juego estático de información incompleta? Esto es: ¿Para qué sirve? La respuesta está en combinar el grado de incertidumbre con los pagos esperados dados los perfiles de estrategia óptimos de los jugadores como una ponderación. De alguna forma indican el valor de la incertidumbre dado los pagos óptimos para el conjunto de jugadores en término del promedio de la información. Es por tanto una “guía” o un “índice” que puede ir más allá de consideraciones teóricas.

Quedan pendientes otros problemas en donde la teoría de juegos y la teoría matemática de la información pueden interrelacionarse tales como los juegos dinámicos de información incompleta, los juegos contra la naturaleza. Lo expuesto no tiene más pretensión que plantear una discusión en cuanto la posibilidad teórica y práctica de combinar las dos teorías matemáticas expuesta: la teoría de juego y la teoría de la información. Y es eso solamente, abrir una discusión. Creemos que hay en este trabajo más preguntas que respuestas.

BIBLIOGRAFIA.

LIBROS.

Álvarez Pedro (1981)
Teoría Matemática de la Información.
Ediciones ICE. Madrid España 272 p.

Edwards W; Tversky A (1976).
Toma de Decisiones
Fondo de Cultura Económica. Mexico

Gonzalez, M y Otero, I (2007)
Curso básico de Teoría DE Juego.
Ediciones IESA, Caracas Venezuela 224 p.

Kreps, David M. (1994)
Teoría de Juegos y Modelación Económica.
Fondo de Cultura Económica, MéxicO. 191 p.

Pérez .J, Jimeno.; J. L, Cerdá E (2004)
Teoría de Juegos.
Pearson Prentice Hall. Madrid España. 513 p

Rasmusen E. (1996)
Juego e Información (Una Introducción a la Teoría de Juegos).
Fondo de Cultura Económica. 548 p.

Rivadula: A (1991)
Probabilidad e Inferencia Estadística.
Anthropos-Barcelona-España. 220 p.

Shubik, M. (1992)
Teoría de Juegos en las Ciencias Sociales
Fondo de Cultura Económica, México. 457p.

Shubik, M. (1992a)
Economía Política: un enfoque desde el punto de vista de la Teoría de Juego.
Fondo de Cultura Económica, México. 692 p.

ARTÍCULOS

Berger J (2006)

The Case for Objective Bayesian Analysis.

Bayesian Analysis Number 3, pp 385-402

Bühlmann P and Hothorn T (2007)

Boosting Algorithms: Regularization, Prediction and Model Fitting.

Statistical Science. Volume 22-4-pag 477-505

Goldstein M (2006)

Subjective Bayesian Analysis: Principles and Practice.

Bayesian Analysis Number 3, pp 403-420

Shannon, C.S (1948)

A Mathematical Theory of Communication.

The Bell System Technical Jounal Vol 27 pag 379-423, 623-656 July. October 1948

INTERNET

Iñigo Iturbe-Ormaeche U. de Alicante 2008-09
Tema 7: Juegos con información incompleta Microeconomía Avanzada
rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/11314/7/Tema7_0809_print.pdf

King Wiliam.
Game Theory: An Introductory Setch. Nash Equilibrium and the Economics of Patents. 3 p. www.drexel.edu/top/eco/game/patent.html (12 julio 2012)